ROLL No. ___________

# LS — 152

ANNUAL EXAMINATION, 2014

**B. Sc. III**

MATHEMATICS

Paper II

[ Abstract Algebra ]

**Time : Three Hours ]** **[ M. M. : 50**

*नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न से कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।*

*Note : Attempt all the five questions. Solve any two parts from each question. All questions carry equal marks.*

*इकाई – I / UNIT – I*

**1.** (a) माना $R^+$ सभी धन वास्तविक संख्याओं का गुणात्मक इकाई है। $f : R^+ \to R^+$ को $f(x) = x^2$, $\forall\, x \in R^+$ से परिभाषित करते हैं। सिद्ध कीजिए कि $f$ एक स्वाकारिता है।

Let $R^+$ be a group with respect to multiplication where $R^+$ is set of all positive real numbers. Then prove that where $f : R^+ \to R^+$ such that $f(x) = x^2$, $\forall\, x \in R^+$, is an automorphism.

P. T. O.





http://www.a2zsubjects.com



(b) मानलो G एक परिमित समूह है। G में $a$ से संयुग्मी अवयवों की संख्या G में $a$ के प्रसामान्यक का सूचक होता है, अर्थात् सिद्ध कीजिए $C_a = \dfrac{0\,(G)}{0\,(N\,(a))}$।

Let G be a finite group. Then prove that the number of elements conjugate to $a$ in G is the index of the normalizer of *it* in G that is $C_a = \dfrac{0\,(G)}{0\,(N\,(a))}$.

(c) प्रथम साइलो प्रमेय को लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove first Sylow's theorem.

*इकाई – II / UNIT – II*

**2.** (a) सिद्ध कीजिए कि दो गुणजावलियों का सर्वनिष्ठ भी एक गुणजावली है। 

Prove that the intersection of two ideals of a ring is also an ideal.

(b) प्रतिरूपकों के समाकरिता के मूलभूत प्रमेय को लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove fundemental theorem of module homomorphism.

(c) बहुपदों $f(x), g(x)$ का परिमेय संख्याओं के क्षेत्र Q में महत्तम उभयनिष्ठ भाजक को ज्ञात कीजिए तथा बहुपदों $s(x), t(x)$ को इस प्रकार व्यक्त कीजिए कि $f(x), (s(x)) + g(x)\, t(x) =$ g.c.d. $(f(x), g(x))$ जहाँ $f(x) = x^3 + x^2 - 2$, $g(x) = x^3 + 2x - 3$।

Find the g.c.d. of the polynomial $f(x)$, $g(x)$ and express the polynomials $s(x)$, $t(x)$ such that $f(x)$, $(s(x)) + g(x)\, t(x) = \text{g.c.d}\,(f(x), g(x))$ where $f(x) = x^3 + x^2 - 2$, $g(x) = x^3 + 2x - 3$.

## इकाई – III / UNIT – III

3. (a) दर्शाइए कि किसी सदिश समष्टि V(F) का एक अरिक्त उपसमुच्चय W, V का एक उपसमष्टि है, यदि और केवल यदि W में प्रत्येक युग्म-सदिश $\alpha, \beta$ और F में प्रत्येक अदिश $a$ के लिए सदिश $a\alpha + \beta$ पुनः W में है।

Show that a non empty subset W of a vector space V(F) is a subspace of V if and only if for each pair of vectors $\alpha, \beta$ in W and each scalar $a$ in F the vector $a\alpha + \beta$ is again in W.

(b) सिद्ध कीजिए कि समुच्चय {(1, 2, 0), (0, 3, 1), (–1, 0, 1)} $V_3(R)$ के लिए एक आधार का निर्माण करते हैं।

Show that the set {(1, 2, 0), (0, 3, 1) (– 1, 0, 1)} form a basis for $V_3(R)$.

(c) सिद्ध कीजिए कि सदिश (0, 1) (0, – 3) तो रैखिकतः आश्रित है, परन्तु सदिश (3, 4) (1, – 3) रैखिकतः आश्रित नहीं है।

Prove that the vectors (0, 1), (0, – 3) are linearly dependent but the vector (3, 4), (1, – 3) are not linearly dependent.



http://www.a2zsubjects.com

http://www.a2zsubjects.com

http://www.a2zsubjects.com



## इकाई – IV / UNIT – IV

4. (a) सिद्ध कीजिए कि फलन $T : V_2 \to V_2$ जो कि निम्न प्रकार से परिभाषित है—

$$T(x, y) = (2x + 3y, 3x - 4y)$$

एक रैखिक रूपान्तरण है।

Prove that the function $T : V_2 \to V_2$ which is defined as follows :

$$T(x, y) = (2x + 3y, 3x - 4y)$$

is linear transformation.

(b) दर्शाईइए कि निम्न आव्यूह विकर्णीय है—

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

Show that the matrix A is diagonalizable where :

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

(c) निम्न द्विघाती समघात को विहित रूप में व्यक्त कीजिए तथा उसकी जाति, सूचकांक एवं चिन्हिका ज्ञात कीजिए—

$$q = x^2 - 2y^2 + 3z^2 - 4yz + 6zx.$$



http://www.a2zsubjects.com

http://www.a2zsubjects.com

## इकाई – V / UNIT – V

5. (a) सिद्ध कीजिए कि $V_2(R)$, $\alpha = (a_1, a_2)$, $\beta = (b_1, b_2)$ पर, $(\alpha, \beta) = a_1b_1 - a_2b_1 - a_1b_2 + 2a_2b_2$ द्वारा परिभाषित कर आन्तर गुणन सहित एक आन्तर गुणन समष्टि है।

Prove that $V_2(R)$ is an inner product space with an inner product defined on $\alpha = (a_1, a_2)$, $\beta = (b_1, b_2) \in V_2(R)$ by $(\alpha, \beta) = a_1b_1 - a_2b_1 - a_1b_2 + 2a_2b_2$.

(b) सिद्ध कीजिए कि आन्तर गुणन समष्टि में सदिश $\alpha$ और $\beta$ रैखिकत: परतन्त्र है यदि और केवल यदि

$$|(\alpha, \beta)| = \|\alpha\| \|\beta\|.$$

Prove that in an inner product space the vectors $\alpha$ and $\beta$ are linearly dependent if and only if

$$|(\alpha, \beta)| = \|\alpha\| \|\beta\|.$$

(c) ग्राम-श्मिट के लाम्बिक प्रक्रम का उपयोग करके $V_3(R)$ के आधार $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ से एक प्रसामान्य लाम्बिक आधार प्राप्त कीजिए, जहाँ

$\beta_1 = (1, 0, 1), \beta_2 = (1, 2, -2), \beta_3 = (2, -1, 1)$ है।

Find the orthonormal basis for $V_3(R)$ with respect to the basis $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ by using Gram-Schmidt orthogonalization process, where

$\beta_1 = (1, 0, 1), \beta_2 = (1, 2, -2), \beta_3 = (2, -1, 1)$.

— A —





http://www.a2zsubjects.com