

03015

Y-2218

B. Sc. (Part III) EXAMINATION, 2015

MATHEMATICS

Paper First

(Analysis)

Time : Three Hours]

[Maximum Marks : 50

नोट : प्रत्येक प्रश्न के कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Solve any *two* parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) यदि $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ तथा $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ क्रमशः A तथा B पर अभिसारित हों, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$$

$$\text{तथा } \sum_{n=1}^{\infty} r \cdot a_n = r \cdot A \quad (r \in \mathbb{R})$$

If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge to A and B respectively, then prove that :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$$

and $\sum_{n=1}^{\infty} r \cdot a_n = r \cdot A$ ($r \in \mathbb{R}$).

(ब) फलन

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

की सांतत्यता एवं अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए।

Test the continuity and differentiability of the following function :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(स) अन्तराल $(-\pi, \pi)$ में फलन

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x \leq \pi \\ -\cos x, & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

की फोरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए।

Find the Fourier series for the function :

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x \leq \pi \\ -\cos x, & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

in the interval $(-\pi, \pi)$.

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) यदि $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ एक परिबद्ध फलन है, तब $[a, b]$ के विभाजन P के लिए सिद्ध कीजिए कि $L(P, f)$ और $U(P, f)$ भी परिबद्ध होंगे।

If $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is a bounded function, then for any partition P of $[a, b]$ prove that $L(P, f)$ and $U(P, f)$ are also bounded.

- (ब) फलन $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ निम्न रूप से परिभाषित है :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{जब } x \text{ परिमेय है} \\ 0, & \text{जब } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$$

तब $\int_{-0}^1 f(x) dx$ तथा $\int_0^{-1} f(x) dx$ की गणना कीजिए तथा दर्शाइए कि $f \notin R[0, 1]$ ।

Function $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ defined as follows :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{when } x \text{ is rational} \\ 0, & \text{when } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

then calculate $\int_{-0}^1 f(x) dx$ and $\int_0^{-1} f(x) dx$ and show that $f \notin R[0, 1]$.

- (स) सिद्ध कीजिए कि समाकल $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ अभिसारी है।

Prove that the integral $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ is convergent.

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) सिद्ध कीजिए कि दो सम्मिश्र संख्याओं के योग का मापांक सदैव उनके मापांकों के योग से छोटा या बराबर होता है।

Show that the modulus of sum of two complex numbers is always less than or equal to the sum of their moduli.

- (ब) दर्शाइए कि द्विरैखिक रूपान्तरण $w = \frac{5-4z}{4z-2}$, वृत्त

$|z|=1$ को w -समतल में इकाई वृत्त में रूपान्तरित करता है। वृत्त का केन्द्र भी ज्ञात कीजिए।

Show that the bilinear transformation $w = \frac{5-4z}{4z-2}$

transforms the circle $|z|=1$ into the unit circle in w -plane. Also find the centre of the circle.

- (स) किसी फलन $f(z)$ के f के प्रांत D के किसी बिन्दु $z = x + iy$ के विश्लेषिक होने के लिए आवश्यक प्रतिबंध लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove the necessary condition of a function $f(z)$ at domain D of f at any point $z = x + iy$.

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) सिद्ध कीजिए कि किसी दूरीक समष्टि में प्रत्येक संवृत गोलक एक संवृत समुच्चय होता है।

Prove that in a metric space, every closed sphere is a closed set.

- (ब) किसी दूरीक समष्टि में प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम एक कौशी अनुक्रम होता है, सिद्ध कीजिए।

Prove that every convergent sequence in a metric space is a Cauchy sequence.

- (स) वास्तविक संख्याओं के समुच्चय \mathbb{R} में आर्किमिडीय गुण का कथन लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Archimedean property in \mathbb{R} .

इकाई—5

(UNIT—V)

5. (अ) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक द्वितीय गणनीय दूरीक समष्टि गणनीय सघन होता है।

Prove that every second countable metric space is separable.

- (ब) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक सम्पूर्णतया परिबद्ध दूरीक समष्टि परिबद्ध होता है।

Prove that every totally bounded metric space is bounded.

- (स) निम्नलिखित में से किन्हीं दो को उदाहरण सहित परिभाषित कीजिए :

- (i) संहत समष्टि
- (ii) पूर्ण प्रतिबद्ध समुच्चय
- (iii) सम्बद्ध समुच्चय

Define any two of the following with an example :

- (i) Compact space
- (ii) Totally bounded set
- (iii) Connected set