Paper Third : 2015 Annual
Vector Analysis & Geometry

UNIT - 1

(अ) यदि $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ तीन असमतलीय सदिश हों, तो सिद्ध कीजिए कि :

If $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ be three non-coplanar vectors, show that :

$$\left[\bar{a}\times\bar{b}, \bar{b}\times\bar{c}, \bar{c}\times\bar{a}\right]=\left[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}\right]^2$$

(ब) यदि : $\bar{V}=e^{xyz}(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$ तो curl $\bar{V}$ ज्ञात कीजिए।

If $\bar{V}=e^{xyz}(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$ find curl $\bar{V}$.

OR

(अ) यदि $\bar{a}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}, \bar{b}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ तथा $\bar{c}=3\hat{i}+2\hat{j}-5\hat{k}$ तो, सत्यापित कीजिए कि : $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})=(\bar{a}\cdot\bar{c})\bar{b}-(\bar{a}\cdot\bar{b})\bar{c}$

If $\bar{a}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}, \bar{b}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ and $\bar{c}=3\hat{i}+2\hat{j}-5\hat{k}$, then verify that : $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})=(\bar{a}\cdot\bar{c})\bar{b}-(\bar{a}\cdot\bar{b})\bar{c}$

(ब) यदि : $\bar{r}=\cos nt\,\hat{i}+\sin nt\,\hat{j}$ तो सिद्ध कीजिए : $\frac{d^2\bar{r}}{dr^2}=-n^2\,\bar{r}$

If : $\bar{r}=\cos nt\,\hat{i}+\sin nt\,\hat{j}$ then prove that : $\frac{d^2\bar{r}}{dr^2}=-n^2\,\bar{r}$

UNIT - 2

(अ) यदि : If : $\bar{a}=t\hat{i}-3\hat{j}+2t\hat{k}, \ \bar{b}=\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$ and $\bar{c}=3\hat{i}+t\hat{j}-\hat{k}$

तो सिद्ध कीजिए : then prove that :

$$\int_1^2\left\{\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\right\}dt=-\frac{87}{2}\hat{i}-\frac{44}{3}\hat{j}+\frac{15}{2}\hat{k}$$

(ब) मान ज्ञात कीजिए : $\int_C \bar{F}.d\bar{r}$ जहाँ : $\bar{F}=\left(x^2+y^2\right)\hat{i}-2xy\,\hat{j}$ वक्र C, xy-तल में एक आयत है जो $y=0,\ x=a,\ y=b,\ x=0$ से घिरा है।

Evaluate : $\int_C \bar{F}.d\bar{r}$ where : $\bar{F}=\left(x^2+y^2\right)\hat{i}-2xy\,\hat{j}$ the curve C is the rectangle in the xy-plane bounded by $y=0, x=a, y=b, x=0$.

OR

(अ) यदि : $\bar{r}=t\hat{i}-t^2\hat{j}+(t-1)\hat{k}, \bar{s}=2t\hat{i}$ तो $\int_0^2(\bar{r}\times\bar{s})dt$ का मान ज्ञात कीजिए।

If : $\bar{r}=t\hat{i}-t^2\hat{j}+(t-1)\hat{k}, \bar{s}=2t\hat{i}$ then evaluate : $\int_0^2(\bar{r}\times\bar{s})dt$

(ब) स्टॉक्स प्रमेय को सत्यापित कीजिए, जबकि $\bar{F}=y\hat{i}+z\hat{j}+x\hat{k}$ तथा सतह S, गोला $x^2+y^2+z^2=1$ का xy-समतल के ऊपर का हिस्सा है।

Verify Stokes' theorem when $\bar{F}=y\hat{i}+z\hat{j}+x\hat{k}$ and surface S is the part of the sphere $x^2+y^2+z^2=1$, above the xy-plane.

UNIT - 3

(अ) शांकय, $x^2+4xy+y^2-2x+2y-6=0$ का अनुरेखण कीजिए तथा उसकी नाभियाँ तथा उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए।

Trace the conic, $x^2+4xy+y^2-2x+2y-6=0$ and find the foci and eccentricity of the conic.

(ब) किसी शांकय में सिद्ध कीजिए कि दो लम्बवत् नाभीय जीवाओं के व्युत्क्रमों का योग अचर होता है। In any conic, prove that the sum of the reciprocals of two perpendicular focal chords is constant.

OR

(अ) परवलय : $9x^2+24xy+16y^2-2x+14y+1=0$ का अनुरेखण कीजिए तथा इसके नाभि के निर्देशांक और नियता का समीकरण प्राप्त कीजिए।

Trace the parabola : $9x^2+24xy+16y^2-2x+14y+1=0$ and find the co-ordinates of its focus and the equation to its directrix.

(ब) उस शांकव का ध्रुवीय समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभि ध्रुव है तथा अक्ष, आदि रेखा से कोण α पर झुकी है। Find the polar equation of a conic with its focus as pole & its axis inclined at angle α to initial line.

UNIT - 4

(अ) बिन्दु (–1, 3, 2) से जाने वाले उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो समतलों $x+2y+2z=5$ तथा $3x+3y+2z=8$ के लम्बवत् हो।

Find the equation to the plane through the point (–1, 3, 2) and perpendicular to the planes $x+2y+2z=5$ and $3x+3y+2z=8$.

(ब) सिद्ध कीजिए कि समीकरण : $ax^2+by^2+cz^2+2ux+2vy+2wz+d=0$

एक शंकु को विरुपित करता है यदि : $\frac{u^2}{a}+\frac{v^2}{b}+\frac{w^2}{c}=d$

Prove that the equation :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2\,ux + 2\,vy + 2\,wz + d = 0$$

represents a cone if : $\dfrac{u^2}{a} + \dfrac{v^2}{b} + \dfrac{w^2}{c} = d$

OR

(अ) सरल रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

Find the shortest distance between the lines :

$$3x - 9y + 5z = 0 = x + y + z$$
$$6x + 8y + 3z - 13 = 0 = x + 2y + z - 3$$

(ब) उस शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष (5, 4, 3) तथा आधार $3x^2 + 2y^2 = 6,\ z + y = 0$ है।

Find the equation of the cone with vertex (5, 4, 3) and $3x^2 + 2y^2 = 6,\ z + y = 0$ as base.

UNIT - 5

(अ) यदि निर्देशांक आयताकार हो, तब दीर्घवृत्तज के बराबर संयुग्मी व्यासों का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए। If the axes are rectangular, find the locus of the equal conjugate diameters of the ellipsoid :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(ब) अतिपरवलयज : $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{16} = 1$ के उस जनक रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो बिन्दु (2, 3, –4) से होकर जाता है।

Find the equations of the generating lines of the hyperboloid:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$$

which passes through the point (2, 3, –4).

OR

(अ) सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (α, β, γ) से परवलयज $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z$ पर डाले गए अभिलम्ब शंकु : $\dfrac{\alpha}{x-\alpha} - \dfrac{\beta}{y-\beta} + \dfrac{a^2 - b^2}{z-\gamma} = 0$ पर पड़ेंगे।

Show that the normals from the point (α, β, γ) on the paraboloid $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z$ lies on the cone :

$$\frac{\alpha}{x-\alpha} - \frac{\beta}{y-\beta} + \frac{a^2 - b^2}{z-\gamma} = 0$$

(ब) समीकरण : $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 2yz + 2zx + 2xy - 4x - 8z + 5 = 0$ का लाम्बिक रूप में समानयन कीजिए। शांकवज की प्रकृति तथा उसके अक्षों का समीकरण भी ज्ञात कीजिए।

Reduce the equation :

$$3x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 2yz + 2zx + 2xy - 4x - 8z + 5 = 0$$

in normal form. Find also the nature of the conicoid and the equations of its axes.