MATHEMATICS

Paper Third : 2017 Annual
Vector Analysis and Geometry

Time : Three Hours] *[Maximum Marks : 50*

नोट :प्रत्येक इकाई से दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान है। Attempt any two parts of each question. All questions carry equal marks.

UNIT - 1

(अ) यदि a, b, c तीन सदिश हैं, तो सिद्ध कीजिए कि :

If a, b, c be any three vectors, then prove that :

$$[a+b,\ b+c,\ c+a] = 2[a\ b\ c]$$

(ब) यदि : If : $a = \sin\theta i + \cos\theta j + \theta k$; $b = \cos\theta i - \sin\theta j - 3k$

$$c = 2i + 3j - k$$

तो $\theta = 0$ पर $\frac{d}{d\theta}\{a \times (b \times c)\}$ का मान ज्ञात कीजिए।

then find at $\frac{d}{d\theta}\{a \times (b \times c)\}$ at $\theta = 0$.

(स) यदि a एक स्थिर सदिश है, तो दर्शाइये कि :

If a is a constant vector, then show that :

(i) $\text{div } (r \times a) = 0$ (ii) $\text{curl } (r \times a) = -2a$

UNIT - 2

(अ) $\int_C (yz\,dx + (zx+1)dy + xy\,dz)$ का मान ज्ञात कीजिए जबकि C एक (1, 0, 0) तथा (2, 1, 4) से गुजरने वाला पथ है।

Evaluate $\int_C (yz\,dx + (zx+1)dy + xy\,dz)$, where C is any path passing from (1, 0, 0) and (2, 1, 4).

(ब) दर्शाइये : Show that : $\iint_S (a x i + b y j + c z k).n\,dS = \frac{4}{3}\pi(a+b+c)$

जहाँ S गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ का सम्पूर्ण पृष्ठ है।

where S is the surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(स) समतल में ग्रीन प्रमेय का उपयोग कर $\oint_C (x+2y)dx + (y+3x)dy$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ C वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ है।

Use Green's theorem in plane to evaluate $\oint_C (x+2y)dx + (y+3x)dy$, where C is the circle $x^2 + y^2 = 1$.

UNIT - 3

(अ) शांकव $8x^2 - 4xy + 5y^2 - 16x - 14y + 17 = 0$ का अनुरेखण कीजिए तथा उसके नाभियों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

Trace the conic $8x^2 - 4xy + 5y^2 - 16x - 14y + 17 = 0$ and find the co-ordinates of foci.

(ब) सिद्ध कीजिए की दो वृत्त जो दो बिन्दुओं (0, a) तथा (0, –a) से गुजरते हैं और जो रेखा $y = mx + c$ के स्पर्श करते हैं, समकोण पर काटेगी, यदि $c^2 = a^2(2 + m^2)$

Prove that the two circles which passes through the points (0, a) and (0, –a) and touch the line $y = mx + c$ will cut orthogonally, if $c^2 = a^2(2 + m^2)$.

(स) दर्शाइये कि रेखा $\frac{1}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$ शांकव $\frac{1}{r} = 1 + l\cos\theta$ को स्पर्श करेगा के लिए प्रतिबन्ध $(A - l)^2 + B^2 = 1$ है।

Show that the condition that the line $\frac{1}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$ may touch the conic $\frac{1}{r} = 1 + l\cos\theta$ is $(A - l)^2 + B^2 = 1$.

UNIT - 4

(अ) उस बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका जनक रेखा $\frac{x}{1} = -\frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ के समान्तर है तथा दीर्घवृत्त $x^2 + 2y^2 = 1,\ z = 0$ है।

Find the equation of cylinder whose generators are parallel to the line $\frac{x}{1} = -\frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ and the base curve is $x^2 + 2y^2 = 1$, $z = 0$.

(ब) उस शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष (α, β, γ) और आधार वक्र $ax^2 + by^2 = 1, z = 0$ है।

Find the equation of the cone whose vertex is (α, β, γ) and base $ax^2 + by^2 = 1, z = 0$.

(स) अचर त्रिज्या k का एक गोला मूल बिन्दु O से होकर जाता है और अक्षों से A, B, C में मिलता है। सिद्ध कीजिए कि समतल ABC पर O से डाले गये लम्ब के पाद का बिन्दुपथ $(x^2 + y^2 + z^2)(x^{-2} + y^{-2} + z^{-2}) = 4k^2$ से दिया जाता है।

A sphere of constant radius k passes through the origin O and meets the axes in A, B, C. Prove that the locus of the foot of perpendiculer from O to the plane ABC is given by :

$$(x^2 + y^2 + z^2)(x^{-2} + y^{-2} + z^{-2}) = 4k^2$$

UNIT - 5

(अ) वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए जब समतल $lx + my + nz = p$ सकेन्द्र शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ का स्पर्श तल हो।

Find the condition that the plane $lx + my + nz = p$ may touch the central conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$.

(ब) अति परवलयज $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$ के बिन्दु (2, 3, –4) से गुजरने वाले जनकों के समीकरण ज्ञात कीजिए। Find the equations to the generating lines of the hyperboloid $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$ which passes through the point (2, 3, –4).

(स) दर्शाइये कि एक दीर्घवृत्तज के नाभिगत शांकवों की उत्केन्द्रताओं का गुणानफल इकाई होता है। Show that the product of the eccentricties of the focal conics of an ellipsoid is unity.