

Paper Second : 2014 Annual Calculus

UNIT - 1

(अ) बंद अंतराल $[-1, 2]$ में फलन : $f(x) = |x| + |x-1|$ की सांतत्यता का परीक्षण कीजिए।

Test for continuity of the function : $f(x) = |x| + |x-1|$
in the closed interval $[-1, 2]$.

(ब) यदि $y = \sin(m \sin^{-1} x)$, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$(1 - x^2) y_{n+2} - (2n+1) x y_{n+1} - (n^2 - m^2) y_n = 0$$

If $y = \sin(m \sin^{-1} x)$, then prove that :

$$(1 - x^2) y_{n+2} - (2n+1) x y_{n+1} - (n^2 - m^2) y_n = 0$$

(स) टेलर प्रमेय से $\log \sin x$ का $(x-2)$ की घातों में प्रसार कीजिए।

Expand $\log \sin x$ in powers of $(x-2)$ by Taylor's theorem.

UNIT - 2

(अ) सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के लिए : $\rho = \frac{a^2 b^2}{p^3}$

जहाँ ρ दीर्घवृत्त के केन्द्र $(0, 0)$ से किसी बिन्दु (x, y) पर डाले गये लम्ब की लम्बाई है।

Prove that for the ellipse : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\rho = \frac{a^2 b^2}{p^3}$

ρ being the length of the perpendicular from the centre $(0, 0)$ upon the tangent at the point (x, y) .

(ब) वक्र : $x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 + xy - y^2 - 1 = 0$ की अनंतस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।

Find the asymptotes of the curve :

$$x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 + xy - y^2 - 1 = 0$$

(स) वक्र $y^2(2a-x) = x^3$ का अनुरेखण कीजिए।

Trace the curve $y^2(2a-x) = x^3$.

UNIT - 3

(अ) परवलयों $y^2 = 4ax$ और $x^2 = 4ay$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Find the area enclosed by the parabolas

$$y^2 = 4ax \text{ and } x^2 = 4ay.$$

(ब) सिद्ध कीजिए : Prove that : $\int_0^\pi \frac{x dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi^2}{2ab}$

(स) मूल्यांकन कीजिए : Evaluate : $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1-2x^2)\sqrt{1-x^2}}$

UNIT - 4

(अ) अवकल समीकरण : $(2x + y - 3) dy = (x + 2y - 3) dx$ को हल कीजिए।
Solve the differential equation : $(2x + y - 3) dy = (x + 2y - 3) dx$

(ब) अवकल समीकरण : $9(y + xp \log p) = (2 + 3 \log p) p^3$ को हल कीजिए।
Solve the differential equation :
 $9(y + xp \log p) = (2 + 3 \log p) p^3$

(स) अवकल समीकरण : $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{xdy}{dx} - 3y = x^2 \log x$ को हल कीजिए।

Solve the differential equation : $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{xdy}{dx} - 3y = x^2 \log x$

UNIT - 5

(अ) स्वतंत्र चर को परिवर्तित करते हुए निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए :
Solve the following differential equation by changing the independent variable :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{a^2}{x^4} y = 0$$

(ब) प्राचल विचरण विधि से अवकल समीकरण : $(D^2 - 1)y = \frac{2}{1+e^x}$ को हल कीजिए। Solve by method of variation of parameters :

$$(D^2 - 1)y = \frac{2}{1+e^x}$$

(स) निम्नलिखित युगपत् अवकल समीकरण हल कीजिए :
Solve the following simultaneous differential equation :

$$\frac{dx}{dt} + 4x + 3y = t$$

$$\frac{dy}{dt} + 2x + 5y = e^t$$