MATHEMATICS - Paper 1^{st} : 2012 Annual
Analysis

UNIT - 1

(अ) सिद्ध कीजिए कि एक निरपेक्ष अभिसारी श्रेणी अभिसारी होती है परंतु इसका विलोम सत्य नहीं है। Prove that every absolutely convergent series is convergent but its converse is not true.

(ब) दर्शाइए कि फलन : $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(0, 0) पर सतत तो है पर अवकलनीय नहीं है।

Show that the function : $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

is continuous but not differentiable at (0, 0).

(स) $x = \pi$ से $x = -\pi$ तक फलन $f(x) = x \sin x$ को निरूपित करने वाली फोरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए। Find the Fourier series to represent the function $f(x) = x \sin x$ from $x = \pi$ to $x = -\pi$

UNIT - 2

(अ) यदि अंतराल [0, 2] में x के सभी परिमेय मानों के लिए $f(x) = x + x^2$ हो तथा इसी अंतराल में x के सभी अपरिमेय मानों के लिए $f(x) = x^2 + x^3$ हो, तब अंतराल [0, 2] पर फलन $f(x)$ के उपरि तथा निम्न रीमान-समाकलनों का मूल्यांकन कीजिए।

If $f(x) = x + x^2$ for rational values of x and $f(x) = x^2 + x^3$ for irrational values of x in the interval [0, 2], then evaluate the upper and the lower Riemann-integrals in the interval [0, 2].

(ब) समाकन की अभिसारिता का परिक्षण कीजिए :

Test the convergence of the integral : $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^n}, a > 0$

(स) सिद्ध कीजिए : Prove that : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log\left(\frac{a + b \sin\theta}{a - b \sin\theta}\right) \frac{d\theta}{\sin\theta} = \pi \sin^{-1} \frac{b}{a}$

UNIT - 3

(अ) यदि z_1 तथा z_2 दो सम्मिश्र संख्याएँ हैं, तब सिद्ध कीजिए कि :

If z_1 and z_2 be any two complex numbers, then prove that :

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left\{|z_1|^2+|z_2|^2\right\}$$

(ब) दर्शाइए कि फलन $f(z)=\sqrt{|xy|}$, मूलबिंदु पर नियमित नहीं है यद्यपि उस बिन्दु पर यह कॉशी-रीमान समीकरण को संतुष्ट करता है।

Show that the function $f(z)=\sqrt{|xy|}$ is not regular at the origin although Cauchy-Riemann equations are satisfied at that point.

(स) उस मोबियस रूपांतरण को ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $z_1=-i$, $z_2=0$, $z_3=i$ को बिन्दुओं $w_1=-1$, $w_2=i$, $w_3=1$ में प्रतिचित्रित करती है।

Find the Mobious transformation that maps points $z_1=-i$, $z_2=0$, $z_3=i$ into the points $w_1=-1$, $w_2=i$, $w_3=1$.

UNIT - 4

(अ) माना (X, d) एक दूरीक समष्टि है तथा d* निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित है :

$$d^*(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)},\ \forall x,y\in X$$

दर्शाइए कि d*, X पर एक दूरीक है।

Let (X, d) be a metric space and let d* be defined by :

$$d^*(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)},\ \forall x,y\in X$$

Show that d* is a metric on X.

(ब) सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{8}$ परिमेय संख्या नहीं है।

Prove that, $\sqrt{8}$ is not a rational number.

(स) बानाख संकुचन सिद्धान्त को लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

State and prove Banach Contraction prinicple.

UNIT - 5

(अ) सिद्ध कीजिए कि, एक दूरीक समष्टि प्रथम गणनीय होता है।

Prove that a metric space is first countable.

(ब) सिद्ध कीजिए कि एक सम्बद्ध समुच्चय का संतत प्रतिबिम्ब संबद्ध होता है।

Prove that the continuous image of a connected set is connected.

(स) सिद्ध कीजिए कि, एक संहत दूरीक समष्टि बोल्जानो-वाइस्ट्रास गुणधर्म (BWP) रखता है। Prove that a compact metric space has Bolzano-Weierstrass Property (BWP).