MATHEMATICS - Paper 2nd : 2011 Annual
Abstract Algebra

UNIT - 1

(अ) मान लिजिए R^+ सभी धन वास्तविक संख्याओं का गुणात्मक समूह है। $f : R^+ \to R^+$ को $f(x) = x^2 \forall x \in R^+$. से परिभाषित कीजिए। सिद्ध कीजिए कि f एक स्वाकारिता है।

Let R^+ be the multiplicative group of all positive real numbers, define $f : R^+ \to R^+$ by $f(x) = x^2 \forall x \in R^+$. Prove that f is an automorphism.

(ब) मान G लिजिए एक समूह है तथा T, G का एक स्वाकारिता है। यदि $a \in G$ के लिए $N(a) = \{x \in G \mid xa = ax\}$, तो सिद्ध कीजिए कि $N(T(a)) = T(N(a))$

Let G be a group and T an automorphism of G. If, for $a \in G$, $N(a) = \{x \in G \mid xa = ax\}$, prove that $N(T(a)) = T(N(a))$.

(स) यदि P एक समूह G का एक मात्र p-सिलो उपसमूह है, तब P, G में प्रसामान्य है और विलोमतः भी। If P is the only p-Sylow subgroup of a group G, then P is normal in G and conversely.

UNIT - 2

(अ) यदि f वलय $(R, +, \cdot)$ से वलय $(R', +', \cdot')$ एक समाकारिता है, तो त्रिक् $(\ker f, +, \cdot)$, $(R, +, \cdot)$ की एक गुणजावली है।

If f is a homomorphism from a ring $(R, +, \cdot)$ into a ring $(R', +', \cdot')$, then the triplate $(\ker f, +, \cdot)$ is an ideal of $(R, +, \cdot)$.

(ब) मान लीजिए M एक R-मॉड्यूल है तथा मान लीजिए A तथा B M के दो उपमॉड्यूल हैं। तब सिद्ध कीजिए कि A + B भी M का एक उपमॉड्यूल होता है।

Let M be an R-module and let A and B be its two submodules. The prove that the linear sum of A and B, denoted by A + B is also a submodule of M.

(स) मानलो f एक R-मॉड्यूल M अंतर्क्षेपी एक R-मॉड्यूल N एक समाकारित है। तब सिद्ध कीजिए कि f एक तुल्यकारिता है यदि और केवल यदि $\ker f = \{0\}$।

Let f be a homomorphism of an R-module M into an R-module N, then prove that f is an isomorphism if and only if $\ker f = \{0\}$.

UNIT - 3

(अ) सिद्ध कीजिए कि दो उपसमष्टियों का संघ उपसमष्टि होता है, यदि और केवल यदि एक दूसरे मे अंतर्विष्ट होता है। Prove that union of two subspaces is a subspace, if and only if one is contained in the other.

http://prsuonline.com

(ब) यदि W एक परिमित विमीय सदिश समष्टि V(F) का एक उपसमष्टि है, तब सिद्ध कीजिए कि : If W is a subspace of a finite dimensional vector space V(F), then prove that :

$$\dim \frac{V}{W} = \dim V - \dim W$$

(स) दर्शाइए कि सादिश (2, 1, 4), (1, -1, 2), (3, 1, -2) R^3 के लिए एक आधार निर्मित करते हैं। Show that the vectors (2, 1, 4), (1, -1, 2), (3, 1, -2) form a basis for R^3.

UNIT - 4

(अ) मान लीजिए एक रैखिक रूपान्तरण $T : V_2 \to V_3$ निम्नलिखित रूप से परिभाषित है

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 - x_2, 7x_2)$$

यदि $B = \{e_1, e_2\}$ और $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ क्रमशः V_2 और V_3 के प्रमाणिक आधार हैं, तो इन आधारों के सापेक्ष T का आव्यूह ज्ञात कीजिए।

Let a linear transformation $T : V_2 \to V_3$ be defined by :

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 - x_2, 7x_2)$$

If $B = \{e_1, e_2\}$ and $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ be the standard bases of V_2 and V_3 respectively, then find the matrix of T with respect to these bases. http://prsuonline.com

(ब) सिल्वेस्टर का शून्यता का नियम लिखिए व सिद्ध कीजिए।
State and prove Sylvester's law of Nullity.

(स) दर्शाइए कि निम्नलिखित आव्यूह A विकर्णीय है :
Show that the following matrix A is diagonalizable :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

UNIT - 5

(अ) किसी अन्तर गुणन समष्टि V(F) में किन्हीं भी दो सदिशों α, β के लिए सिद्ध कीजिए कि In an inner product space V(F), for any two vectors, α, β prove that : $|(\alpha, \beta)| \le ||\alpha|| \cdot ||\beta||$

(ब) यदि α और β किसी आन्तर गुणन समष्टि V (F) के सदिश हैं, तब दर्शाइए कि :
If α and β are vectors in an inner product space V (F), prove that : $||\alpha+\beta||^2 + ||\alpha-\beta||^2 = 2||\alpha||^2 + 2||\beta||^2$

(स) ग्राम-श्मिट के लाम्बिक प्रक्रम का उपयोग करके V_3 (R) के आधार $B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ से एक प्रासामान्य लाम्बिक आधार प्राप्त कीजिए जहाँ :
Apply the Gram-Schmidt orthogonalization process to obtain an orthonormal basis from the basis $B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ of V_3 (R), where:

$$\beta_1 = (1, 0, 1),\ \beta_2 = (1, 2, -2),\ \beta_3 = (2, -1, 1)$$