http://www.prsunotes.com

Roll No. .....

A–2239

B. A. (Part III) EXAMINATION, 2017

MATHEMATICS

Paper First

(Analysis)

Time : Three Hours] [*Maximum Marks : 50*

नोट : प्रत्येक इकाई से दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Solve any *two* parts from each Unit. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) डिरिख्ले परीक्षण लिखिये एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Dirichlet's test.

(ब) फलन

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}, & \text{जब } x^2+y^2\neq 0\\ 0\ , & \text{जब } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

के लिये स्वार्ज प्रमेय सत्यापित कीजिए।

http://www.prsunotes.com

Verify the Schwarz's theorem for the function :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}, & \text{when } x^2+y^2\neq 0\\ 0\ , & \text{when } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(स) अन्तराल $0<x<2\pi$ में फलन $f(x)=x$ को प्रदर्शित करने वाली फूरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए।

Obtain the Fourier series representing the function $f(x)=x$ in the interval $0<x<2\pi$.

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) माना $f:[a,b]\to \mathrm{R}$ एक डिरिख्ले फलन है, जो निम्न रूप में परिभाषित है :

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{जब } x \text{ परिमेय है}\\ 0, & \text{जब } x \text{ अपरिमेय है}\end{cases}$$

$\int_{-0}^{1} f$ तथा $\int_{0}^{-1} f$ की गणना कीजिए और दर्शाइये कि $f\notin \mathrm{R}[0,1]$।

Let $f:[a,b]\to \mathrm{R}$ be Dirichlet function defined by :

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{when } x \text{ is rational}\\ 0, & \text{when } x \text{ is irrational}\end{cases}$$

Calculate $\int_{-0}^{1} f$ and $\int_{0}^{-1} f$ and hence show that $f\notin \mathrm{R}[0,1]$.

(ब) $\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{1+x^2}$ का अभिसरण के परीक्षण कीजिए।

Test for the convergence :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}.$$

http://www.prsunotes.com

http://www.prsunotes.com

(स) सर्वसमिका $\frac{1}{y} = \int_0^\infty e^{-xy}dx$ जब $y > 0$ के प्रयोग से दर्शाइये कि :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \log\frac{b}{a} \text{ जहाँ } (a > 0, b > 0)\text{ ।}$$

Use the identity $\frac{1}{y} = \int_0^\infty e^{-xy}dx$ when $y > 0$, show that :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \log\frac{b}{a} \text{ when } (a > 0, b > 0)$$

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) यदि $f(z) = u + iv$ एक विश्लेषिक फलन है तथा $z = re^{i\theta}$, जहाँ u, v, r, θ सभी वास्तविक हैं, तो दर्शाइये कि कौशी-रीमान समीकरण हैं :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

If $f(z) = u + iv$ is an analytic function and $z = re^{i\theta}$, where u, v, r, θ are all real, show that the Cauchy-Riemann equations are :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

(ब) दर्शाइये कि हार्मोनिक फलन संतत रूप में अवकल समीकरण $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$ को संतुष्ट करता है।

Show that a harmonic function satisfies the formal differential equation $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$.

http://www.prsunotes.com

http://www.prsunotes.com

(स) बिन्दु $z_1 = 2, z_2 = i, z_3 = -2$ को बिन्दुओं $w_1 = 1, w_2 = i$ और $w_3 = -1$ में प्रतिचित्रित करने वाले द्विरैखिक रूपान्तरण को ज्ञात कीजिए।

Find the bilinear transformation which maps the points $z_1 = 2, z_2 = i, z_3 = -2$ into the points $w_1 = 1, w_2 = i$ and $w_3 = -1$.

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) माना X एक अरिक्त समुच्चय है। एक प्रतिचित्रण निम्न रूप में परिभाषित करते हैं :

$d : X \times X \to R$ इस प्रकार कि :

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{यदि } x = y \\ 1, & \text{यदि } x \neq y \end{cases}$$

तो दर्शाइये कि d, X के लिये एक दूरीक है।

Let X be a non-empty set. Define a mapping $d : X \times X \to R$ then

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{if } x = y \\ 1, & \text{if } x \neq y \end{cases}$$

Then show that d is a metric on X.

(ब) सिद्ध कीजिए कि किसी दूरीक समष्टि में, विवृत समुच्चयों का एक स्वेच्छ संग्रह का संघ विवृत होता है।

In a metric space, prove that the union of an arbitrary collection of open set is open.

(स) कैन्टर सर्वनिष्ठ प्रमेय लिखिये एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Cantor's Intersection theorem.

http://www.prsunotes.com

http://www.prsunotes.com

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) बेयर संवर्ग प्रमेय लिखिये एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Bair's category theorem.

(ब) माना (X, d) तथा (Y, ρ) दो दूरीक समिष्टियाँ हैं और $f : X \to Y$ एक फलन है। सिद्ध कीजिए कि f सतत् है यदि और केवल यदि $f^{-1}(F)$, X में संवृत है जब कभी F, Y में संवृत है।

Let (X, d) and (Y, ρ) be two metric spaces and $f : X \to Y$ be a function. Then show that f is continuous if and only if $f^{-1}(F)$ is closed in X whenever F is closed in Y.

(स) सिद्ध कीजिए कि किसी संहत दूरीक समष्टि का एक संवृत उपसमुच्चय संहत होता है।

Prove that a closed subset of a compact metric space is compact.

http://www.prsunotes.com

http://www.prsunotes.com

http://www.prsunotes.com

http://www.prsunotes.com

http://www.prsunotes.com