Roll No. ....

E–3135

B. A. (Part I) EXAMINATION, 2021

(New Course)

MATHEMATICS

Paper First

(Algebra and Trigonometry)

Time : Three Hours] [*Maximum Marks : 50*

नोट : प्रत्येक प्रश्न से कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Solve any *two* parts of each Unit. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) केवल प्रारम्भिक पंक्ति संक्रियाओं के उपयोग के द्वारा ही आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$ का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए।

Use only elementary row operations, find the inverse of the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(ब) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ के अभिलाक्षणिक मूलों को ज्ञात कीजिए तथा उससे संबंधित अभिलाक्षणिक सदिश ज्ञात कीजिए।

Find all the eigen values and the corresponding eigen vectors of the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(स) दर्शाइये कि आव्यूह :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

कैले-हैमिल्टन प्रमेय को सतुष्ट करते हैं।

Show that the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

satisfy Cayley-Hamilton theorem.

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) निम्नलिखित समीकरणों को आव्यूह विधि की प्रारम्भिक संक्रियाओं द्वारा हल कीजिए :

$$x + y + z = 6$$

$$x - y + z = 2$$

$$2x + y - z = 1$$

Solve the following equations with the help of elementary operations of matrix method :

$$x + y + z = 6$$

$$x - y + z = 2$$

$$2x + y - z = 1$$

(ब) समीकरण :

$$x^4 - 16x^3 + 86x^2 - 176x + 105 = 0$$

को हल कीजिए, जिनके दो मूल 1 और 7 हैं।

Solve the equation :

$$x^4 - 16x^3 + 86x^2 - 176x + 105 = 0$$

two roots being 1 and 7.

(स) देकार्ते विधि द्वारा बाईक्वाड्रिक समीकरण :

$$x^4 - 3x^2 - 42x - 40 = 0$$

को हल कीजिए।

Solve the biquadratic equation :

$$x^4 - 3x^2 - 42x - 40 = 0$$

by Descartes' method.

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) यदि R और S समुच्चय X में तुल्यता संबंध हों, तो सिद्ध कीजिए कि $R \cap S$ भी X में एक तुल्यता संबंध है।

If R and S be equivalence relations in the set X, then prove that $R \cap S$ is an equivalence relation in X.

(ब) दर्शाइये कि पूर्णांकों के समुच्चय में "समशेष मॉड्यूलो n" एक तुल्यता संबंध है। यह भी दर्शाइये कि यह तुल्यता संबंध n भिन्न-भिन्न तुल्यता वर्ग रखता है।

Show that "Congruence modulo n" is an equivalence relation in the set of integers. Further show that this equivalence relation has n distinct equivalence classes.

(स) सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ योग मॉड्यूलो 6 के अन्तर्गत कोटि 6 का एक परिमित आबेली समूह है।

Prove that the set $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ is a finite abelian group of order 6 with respect to addition modulo 6 as the composition in G.

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) परिमित कोटि n के जनक सहित एक चक्रीय समूह G इकाई के n, nवें मूल के गुणात्मक समूह से तुल्यकारी होता है।

A cyclic group G with generator of finite order n is isomorphic to the multiplicative group of n, nth roots of unity.

(ब) समूह G का समूह G' में एक समाकारिता f, जिसका कर्नेल K है G से G' में तुल्यकारी होता है यदि और केवल यदि इसकी अष्टि तुच्छ हो, अर्थात् $K = \{e\}$ ।

A group homomorphism $f : G \to G'$ is an isomorphism if and only if Ker $f = \{e\}$.

(स) यदि f वलय $(R, +, .)$ से वलय $(R', +', .')$ एक समाकारिता है, तो त्रिक $(\text{Ker } f, +, .), (R, +, .)$ की एक गुणजावली है।

If f is a homorphism from a ring $(R, +, .)$ into a ring $(R', +', .')$, then triplate $(\text{Ker } f, +, .), (R, +, .)$ is an ideal of (R, +, .).

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) यदि $x_r = \cos\dfrac{\pi}{2^r} + i\sin\dfrac{\pi}{2^r}$; $r = 1, 2, 3,$ .... , तो सिद्ध कीजिए कि $x_1.x_2.x_3$ .... अनन्त तक $= -1$ ।

If $x_r = \cos\dfrac{\pi}{2^r} + i\sin\dfrac{\pi}{2^r}$, $r = 1, 2, 3,$........., then prove that $x_1.x_2.x_3$.......... adj. inf $= -1$.

(ब) यदि $\sin(A + iB) = x + iy$, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{x^2}{\cosh^2 B} + \frac{y^2}{\sinh^2 B} = 1$$

तथा $$\frac{x^2}{\sin^2 A} - \frac{y^2}{\cos^2 A} = 1.$$

If $\sin(A + iB) = x + iy$, then prove that :

$$\frac{x^2}{\cosh^2 B} + \frac{y^2}{\sinh^2 B} = 1$$

and $$\frac{x^2}{\sin^2 A} - \frac{y^2}{\cos^2 A} = 1.$$

(स) सिद्ध कीजिए कि :

$$\tan\left(i \log \frac{a - ib}{a + ib} \right) = \frac{2ab}{a^2 - b^2}.$$

Prove that :

$$\tan\left(i \log \frac{a - ib}{a + ib} \right) = \frac{2ab}{a^2 - b^2}.$$