

Roll No

Total No. of Sections : 03

Total No. of Printed Pages : 06

(2)

Code No. : S-358

Code No. : S-358

Annual Examination - 2018

B.Sc. Part - III

MATHEMATICS

Paper - I

ANALYSIS

Max.Marks : 50

Min.Marks : 17

Time : 3 Hrs.

टीप : खण्ड 'अ' में दस अतिलघूत्तरी प्रश्न हैं, जिन्हें हल करना अनिवार्य है। खण्ड 'ब' में लघूत्तरी प्रश्न एवं खण्ड 'स' में दीर्घ उत्तरी प्रश्न हैं। खण्ड 'अ' को सबसे पहले हल करें।

Note : Section 'A', containing 10 very short-answer-type questions, is compulsory. Section 'B' consists of short-answer-type questions and Section 'C' consists of long-answer-type questions. Section 'A' has to be solved first.

Section - 'A'

निम्नांकित अतिलघूत्तरी प्रश्नों के उत्तर एक या दो वाक्यों में दें।  
Answer the following very short-answer-type questions in one or two sentences. (1x10=10)

प्रश्न 1. यदि  $P > 0$  तो  $n \rightarrow \infty$   $\frac{1}{n^P}$  का मान क्या होगा?  $\frac{1}{n^P}$

If  $P > 0$  then what will be the value of  $n \rightarrow \infty$   $\frac{1}{n^P}$ .

प्रश्न 2. यंग प्रमेय का कथन लिखिए।

Write the Statement of Young's theorem.

प्रश्न 3. रिमान समाकल को परिभाषित कीजिए।

Define Riemann integral.

प्रश्न 4. समाकल  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)dx$  के अभिसरण के लिए आबेल परीक्षण लिखिए।

Write the Abel's test for the convergence of integral  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)dx$ .

प्रश्न 5. द्विरैखिक रूपांतरण को परिभाषित कीजिए।

Define bilinear transformation.

प्रश्न 6. फलन  $w = f(z)$  को अनुकोण प्रतिचित्रण प्रदर्शित करने हेतु पर्याप्त प्रतिबंध लिखिए।

Write the sufficient condition for the function  $w = f(z)$  to represent conformal mapping.

प्रश्न 7. वास्तविक रेखा R के एक उपसमुच्चय  $A = \{1, 1/2, 1/3, \dots\}$  का सीमा बिंदु ज्ञात कीजिए।

Find the limit point of a subset  $A = \{1, 1/2, 1/3, \dots\}$  of real line R.

प्रश्न 8. बानाख स्थिर बिंदु प्रमेय का कथन लिखिए।

Write the Statement of Banach fixed point theorem.

प्रश्न 9. बेयर संवर्ग प्रमेय का कथन लिखिए।

Write the statement of Baire's category theorem.

प्रश्न 10. संहत समाष्ट को परिभाषित कीजिए।

Define compact space.

Section - 'B'

निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दें :

Answer the following questions :

(3x5=15)

प्रश्न 1. दर्शाइए कि द्विक श्रेणी  $\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{2^m 3^n}$  अभिसारी है।

Show that the double series  $\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{2^m 3^n}$  is convergent.

(3)

Code No. : S-358

OR

सिद्ध कीजिए कि फलन  $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ ,  $(0, 0)$  पर अवकलनीय नहीं है

किंतु  $\frac{\partial f}{\partial x}$  तथा  $\frac{\partial f}{\partial y}$  दोनों  $(0, 0)$  पर विद्यमान हैं।

Prove that the function  $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ , is not differentiable at  $(0, 0)$

but  $\frac{\partial f}{\partial x}$  and  $\frac{\partial f}{\partial y}$  both exist at  $(0, 0)$ .

प्रश्न 2. बीटा फलन  $\int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$  के अभिसरण की व्याख्या कीजिए।

Describe the convergence of the beta function  $\int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$ .

OR

समाकलन गणित का मूलभूत प्रमेय लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove fundamental theorem of integral calculus.

प्रश्न 3. विश्लेषिक फलन ज्ञात कीजिए जिसका वास्तविक भाग

$$e^{-x} \{(x^2 - y^2) \cos y + 2xy \sin y\} \text{ है।}$$

Determine the analytic function whose real part is

$$e^{-x} \{(x^2 - y^2) \cos y + 2xy \sin y\}.$$

OR

दर्शाइए कि रूपांतरण  $w = \frac{2z+3}{z-4}$  वृत्त  $x^2 + y^2 - 4x = 0$  को सरल रेखा

$4u+3=0$  पर प्रतिचित्रित करता है।

Show that the transformation  $w = \frac{2z+3}{z-4}$  maps circle  $x^2 + y^2 - 4x = 0$

into straight line  $4u+3=0$ .

P.T.O.

(4)

Code No. : S-358

प्रश्न 4. किसी दूरिक समष्टि में प्रत्येक संवृत गोलक एक संवृत समुच्चय होता है।

In a metric space, every closed sphere is a closed set.

OR

आर्किमिडीय प्रगुण का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove Archimedean property.

प्रश्न 5. माना  $(x, d)$  तथा  $(y, p)$  दो दूरिक समष्टियां हैं और  $f: x \rightarrow y$  एक फलन  $g \& r c$   $f$  संतत होगा यदि और केवल यदि  $y$  में विवृत समुच्चय का प्रतिलोक चित्रण  $x$  में विवृत हो।

Let  $(x, d)$  and  $(y, p)$  are two metric spaces and  $f: x \rightarrow y$  is a function.

Then  $f$  will be continuous iff inverse image of open set in  $y$  is open in  $x$ .

OR

प्रत्येक द्वितीय गणनीय दूरिक समष्टि गणनीय सघन होता है।

Every second countable metric space is separable.

Section - 'C'

निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दें :

Answer the following questions :

(5x5=25)

प्रश्न 1. दर्शाइए कि फलन  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  स्वार्ज प्रमेय

के प्रतिबंधों को संतुष्ट नहीं करता है तथा  $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$

Show that the function  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  does not

satisfy the conditions of Shwarz theorem and  $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$

(5)

Code No. : S-358

OR

फलन  $f(x) = |x|$ ,  $-\pi < x < \pi$  के लिए फूरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए।

Find the Fourier series of the function  $f(x) = |x|$ ,  $-\pi < x < \pi$ .

प्रश्न 2. निम्नलिखित समाकल का प्राचल के सापेक्ष अवकलन की सहायता से मान ज्ञात

कीजिए  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos \alpha x dx$

Find the value of the following integral with the help of differentiation with

respect to parameter  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos \alpha x dx$

OR

किसी फलन के रिमान समाकल के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबंध लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove necessary and sufficient condition of Riemann integral of a function.

प्रश्न 3. उन सभी द्विरैखिक रूपांतरणों को ज्ञात कीजिए जो अर्ध समतल  $I(z) \geq 0$  को इकाई वृत्तीय चक्रिका  $|w| \leq 1$  में प्रतिचित्रित करता है।

Find all bilinear transformations that map half plane  $I(z) \geq 0$  into unit circular disc  $|w| \leq 1$ .

OR

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक द्विरैखिक रूपांतरण जो केवल एक स्थिर बिंदु  $\alpha$

रखता है, निम्नलिखित रूप में रखा जा सकता है-  $\frac{1}{w-z} = \frac{1}{z-\alpha} + \lambda$

Prove that every bilinear transformation that has only one fixed point

$\alpha$  can be put into the following form  $\frac{1}{w-z} = \frac{1}{z-\alpha} + \lambda$

P.T.O.