

Roll No.

003 B 15

Y-2168

B. Sc. (Part II) EXAMINATION, 2015

MATHEMATICS

Paper First

(Advanced Calculus)

Time : Three Hours]

[Maximum Marks : 50

नोट : कुल पाँच प्रश्नों को हल कीजिए। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न करना अनिवार्य है। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Attempt five questions in all. One question from each Unit is compulsory. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) सिद्ध कीजिए :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^n}{[n]} \right)^{1/n} = e.$$

Prove that :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^n}{[n]} \right)^{1/n} = e.$$

(अ) निम्नलिखित श्रेणी के अभिसरण का परीक्षण कीजिए :

$$\left(\frac{2^2}{1^2} - \frac{2}{1}\right)^{-1} + \left(\frac{3^3}{2^3} - \frac{3}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{4^4}{3^4} - \frac{4}{3}\right)^{-3} + \dots$$

Test the convergence of the following series :

$$\left(\frac{2^2}{1^2} - \frac{2}{1}\right)^{-1} + \left(\frac{3^3}{2^3} - \frac{3}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{4^4}{3^4} - \frac{4}{3}\right)^{-3} + \dots$$

2. (अ) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक कॉशी अनुक्रम परिबद्ध होता है किन्तु इसका विलोम सत्य नहीं है।

Prove that every Cauchy sequence is bounded but the converse is not true.

(ब) निम्नलिखित श्रेणी की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए :

$$1 + \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \dots, x > 0$$

Test the convergence of the following series :

$$1 + \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \dots, x > 0$$

इकाई—2

(UNIT—2)

3. (अ) फलन $f(x) = x^2 - 6x + 8$ के लिए अंतराल $[2, 4]$ में रोले प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

Verify Rolle's theorem for the function $f(x) = x^2 - 6x + 8$ in the interval $[2, 4]$.

- (ब) मूल बिंदु पर निम्नलिखित फलन के सातत्य की जाँच कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} |x| & , \text{ यदि } x \neq 0 \\ x & , \text{ यदि } x = 0 \end{cases}$$

Test the continuity of the following function at the origin :

$$f(x) = \begin{cases} |x| & , \text{ if } x \neq 0 \\ x & , \text{ if } x = 0 \end{cases}$$

4. (अ) कौशी माध्यमान प्रमेय का कथन लिखकर इसे सिद्ध कीजिए।
State and prove Cauchy mean value theorem.
- (ब) सिद्ध कीजिए :

$$\frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} = F''(x + \theta h)$$

Prove that :

$$\frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} = F''(x + \theta h)$$

इकाई—3

(UNIT—3)

5. (अ) समीकरण :

$$(1+x^2)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x(1+x^2) \frac{dy}{dx} + y = 0$$

का प्रतिस्थापन $x = \tan z$ के द्वारा रूपांतरण कीजिए।

Transform the equation :

$$(1 + x^2)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x(1 + x^2) \frac{dy}{dx} + y = 0$$

by the substitution $x = \tan z$.

(ब) यदि :

$$u = \sin^{-1} \left(\frac{x^2 + y^2}{x + y} \right)$$

तब सिद्ध कीजिए कि :

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \tan u$$

If :

$$u = \sin^{-1} \left(\frac{x^2 + y^2}{x + y} \right)$$

then prove that :

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \tan u$$

6. (अ) यदि :

$$x + y + z = u$$

$$y + z = uv$$

$$z = uvw$$

तब सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = u^2v$$

If :

$$x + y + z = u$$

$$y + z = uv$$

$$z = uvw$$

prove that :

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = u^2v$$

- (ब) निम्नलिखित फलन की बिंदु $(0, 0)$ पर सातत्य की जाँच कीजिए :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Test the continuity of the following function at origin $(0, 0)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

इकाई—4

(UNIT—4)

7. (अ) सरल रेखाओं $x \cos \alpha + y \sin \alpha = l \sin \alpha \cos \alpha$ के कुल का अन्वालोप ज्ञात कीजिए जहाँ कोण α प्राचल है।

Find the envelope of the family of straight lines $x \cos \alpha + y \sin \alpha = l \sin \alpha \cos \alpha$ where angle α is a parameter.

- (ब) फलन :

$$u = xy + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y}$$

के उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ मान की विवेचना कीजिए।

Discuss the minimum or maximum value of the function :

$$u = xy + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y}$$

8. (अ) अतिपरवलय $2xy = a^2$ का केन्द्रज ज्ञात कीजिए।

Find the evolute of the hyperbola $2xy = a^2$.

- (ब) $u = x^2 + y^2 + z^2$ का उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए जबकि $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ और $lx + my + nz = 0$.

Find the minimum or maximum value of $u = x^2 + y^2 + z^2$ when $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ and $lx + my + nz = 0$.

इकाई—5

(UNIT—5)

9. (अ) मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx$$

Evaluate :

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx$$

- (ब) मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_1^e \int_0^{\log y} \int_1^{e^z} \log z dy dx dz$$

Evaluate :

$$\int_1^e \int_0^{\log y} \int_1^{e^z} \log z dy dx dz$$

10. (अ) समाकल :

$$\iiint x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} dx dy dz$$

का मान ज्ञात कीजिए जबकि $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ तथा

$$(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 \leq 1.$$

[7]

Y-2168

Find the value of the integral :

$$\iiint x^{f-1} y^{m-1} z^{n-1} dx dy dz$$

when

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$$

$$\text{and } (x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 \leq 1.$$

(ब) - समाकल का क्रम बदलिए :

$$\int_0^{2a} \int_{x^2/4a}^{3a-x} f(x, y) dx dy$$

Change the order of integration :

$$\int_0^{2a} \int_{x^2/4a}^{3a-x} f(x, y) dx dy$$

Y-2168

5,000

A-89