

ROLL No. _____

LS—130
ANNUAL EXAMINATION, 2014

B. Sc. II

MATHEMATICS
Paper I

[Advanced Calculus]

Time : Three Hours]

[M. M. : 50]

नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न से कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Attempt all the five questions. Solve any two parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाइ - I / UNIT - I

1. (अ) अनुक्रम $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ जहाँ $a_n = (-1)^n + 1$ की सीमा तथा सीमा बिन्दुओं की चर्चा कीजिए तथा दर्शाइए कि उपर्युक्त अनुक्रम की कोई सीमा नहीं है।

Discuss about the limit and limit points of the sequence $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, where $a_n = (-1)^n + 1$ and show that limit of above sequence does not exist.

P. T. O.

<http://www.a2zsubjects.com>

[2]

(ब) श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए जहाँ $a_n = \sqrt{n^3 + 1} - \sqrt{n^3 - 1}$ है।

Test the convergence of the infinite $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, where $a_n = \sqrt{n^3 + 1} - \sqrt{n^3 - 1}$.

(स) निम्नलिखित श्रेणी की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए—

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^4}{8} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \frac{x^6}{12} + \dots$$

Test the convergence of the following infinite series :

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^4}{8} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \frac{x^6}{12} + \dots$$

इकाइ - II / UNIT - II

2. (अ) दर्शाइए कि—

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

Show that :

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

(ब) फलन $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ का बिन्दु $x = 0$ का सांतत्य का परीक्षण कीजिए।

LS—130

[3]

Test the continuity of the function $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, at the point $x = 0$.

(स) सिद्ध कीजिए कि—

$$e^{ax} \cos bx = 1 + ax + \frac{a^2 - b^2}{2!} x^2 + \frac{a(a^2 - 3b^2)}{3!} x^3 + \dots$$

Prove that :

$$e^{ax} \cos bx = 1 + ax + \frac{a^2 - b^2}{2!} x^2 + \frac{a(a^2 - 3b^2)}{3!} x^3 + \dots$$

इकाई - III / UNIT - III

3. (अ) किसी फलन के सांतत्य को परिभाषित कीजिए। दर्शाइए कि फलन $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ मूल बिन्दु पर संतत है।

Define continuity of a function. Show that the function $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ is continuous at the origin.

(ब) प्रतिस्थापन $z = (1+x)e^{-x}$ के द्वारा समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \frac{dy}{dx} + 4x^2ye^{-2x} = 4(x^2 + x^3)e^{-3x}$$

को रूपान्तरित कीजिए।

[4]

Transform the equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \frac{dy}{dx} + 4x^2ye^{-2x} = 4(x^2 + x^3)e^{-3x}$$

by taking $z = (1+x)e^{-x}$.

- (स) फलन $f(x, y) = \sin xy$ का $(x-1)$ तथा $\left(y - \frac{\pi}{2}\right)$ के घातों में द्विघातीय पदों तक प्रसार ज्ञात कीजिए।

Expand $f(x, y) = \sin xy$ in powers of $(x-1)$ and $\left(y - \frac{\pi}{2}\right)$ upto second degree terms.

- (द) यदि $y_1 = \frac{x_2x_3}{x_1}$, $y_2 = \frac{x_1x_3}{x_2}$ तथा $y_3 = \frac{x_1x_2}{x_3}$ तब सिद्ध कीजिए कि $\frac{\partial(y_1, y_2, y_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = 4$.

If $y_1 = \frac{x_2x_3}{x_1}$, $y_2 = \frac{x_1x_3}{x_2}$ and $y_3 = \frac{x_1x_2}{x_3}$, then prove that $\frac{\partial(y_1, y_2, y_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = 4$.

इकाई - IV / UNIT - IV

4. (अ) बहुकुल $x \cos^n \theta + y \sin^n \theta = a$ के अन्वालोप का समीकरण ज्ञात कीजिए जहाँ a प्राचल है।

Find the equation to the envelope of the family of curves given by $x \cos^n \theta + y \sin^n \theta = a$, where a is the parameter.

[5]

(ब) $\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \log(1+x) \right\}$ का मूल्यांकन कीजिए।

Evaluate the limit $\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \log(1+x) \right\}$

(स) u का उच्चिष्ठ मान ज्ञात कीजिए जहाँ $u = \sin x \sin y \sin(x+y)$ है।

Find the maxima of u , where $u = \sin x \sin y \sin(x+y)$. <http://www.a2zsubjects.com>

इकाई - V / UNIT - V

5. (अ) सिद्ध कीजिए कि—

$$\int_a^b (x-a)^{m-1} (b-x)^{n-1} dx = (b-a)^{m+n-1} \beta(m, n)$$

Prove that :

$$\int_a^b (x-a)^{m-1} (b-x)^{n-1} dx = (b-a)^{m+n-1} \beta(m, n)$$

(ब) निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए—

$$\int_0^{\log 2} \int_0^x \int_0^{x+y} e^{x+y+z} dx dy dz.$$

Evaluate the following :

$$\int_0^{\log 2} \int_0^x \int_0^{x+y} e^{x+y+z} dx dy dz.$$

[6]

(स) निम्नलिखित समाकलनों में समाकलन के क्रम को परिवर्तित कीजिए—

$$\int_0^a \int_x^{a^2/x} V dx dy.$$

Change the order of integration in the following integral :

$$\int_0^a \int_x^{a^2/x} V dx dy.$$

— A —