Paper Second : 2016 Annual
Abstract Algebra

नोट : सभी पाँच प्रश्न के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न करना अनिवार्य है। सभी प्रश्नों के अंक समान है।

UNIT - 1

(अ) समूह के केन्द्र को परिभाषित कीजिए। सिद्ध कीजिए कि 3-अवयव पर सममित समूह (S_3) पूर्ण समूह होता है। Define centre of group. Prove that S_3-symmetric group over 3-symbols is a complete group.

(ब) स्वकारिता को परिभाषित कीजिए। यदि किसी समूह की कोटि 56 है, तो सिद्ध कीजिए कि वह समूह 1 या 8 सिलो उपसमूह रखता है।
Define Automorphism. If order of a group is 56, then show that this group has 1 or 8 Sylow subgroup.

(स) गणन सिद्धान्त को लिखकर सिद्ध कीजिए।
State and prove counting principle.

UNIT - 2

(अ) विभाग वलय को परिभाषित कीजिए। सिद्ध कीजिए कि पूर्णांकों का वलय एक मुख्य गुणजावलि वलय होता है। Define Quotient ring. Prove that ring of integers is principal ideal ring.

(ब) वलय समाकारिता पर मूलभूत प्रमेय को लिखकर सिद्ध कीजिए।
State and prove fundamental theorem of ring homomorphism.

(स) किसी वलय के प्रतिरूपक को परिभाषित कीजिए। आइंस्टीन के सूत्र की मदद से बहुपद $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ की खण्डनीयता की जाँच कीजिए।
Define module of a ring. With the help of Einstein formula check the reducibility of the following Polynomial :

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

UNIT - 3

(अ) क्या $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $\alpha_1 = (1, 0, -1)$, $\alpha_2 = (1, 2, 1)$, $\alpha_3 = (0, -3, 2)$, $V_3(R)$ का आधार बनाते हैं ?
Is $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $\alpha_1 = (1, 0, -1)$, $\alpha_2 = (1, 2, 1)$, $\alpha_3 = (0, -3, 2)$ a basis of $V_3(R)$?

(ब) सदिश समष्टि को परिभाषित कीजिए। दिखाइये कि : $W_1 + W_2 = [W_1 \cup W_2]$ जहाँ W_1 और W_2, $V(F)$ की दो उपसमष्टियाँ हैं।
Define vector space. Show that : $W_1 + W_2 = [W_1 \cup W_2]$ where W_1 and W_2 are two subspaces of $V(F)$.

(स) दिखाइये कि किसी परिमित विमीय सदिश समष्टि का प्रत्येक रेखिकतः स्वतंत्र उपसमुच्चय सदिश समष्टि का आधार होता है या उसे आधार निर्मित करने के लिए विस्तारित किया जा सकता है।

Show that every linearly independent subset of a finite dimensional vector space is a basis of vector space or it can be extended to construct the basis of vector space.

UNIT - 4

(अ) लैग्रांज की समानयन विधि से द्विघाती समघात

$9 = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2 - 7x_3^2 + 8x_1x_3$ का विहित घात में समानयन कीजिए और इसकी जाति, सूचकांक और चिन्हिका ज्ञात कीजिये।

By the method of Langrange's reduction change the billinear

from : $9 = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2 - 7x_3^2 + 8x_1x_3$

into canonical form and find its rank, index and signature.

(ब) सदिश समष्टि $V_3(R)$ के आधार समुच्चय $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $\alpha_1 = (1, -2, 3)$, $\alpha_2 = (1, -1, 1)$, $\alpha_3 = (2, -4, 7)$ का द्वैत आधार ज्ञात कीजिए।

Find the dual basis of $V_3(R)$ with respect to the basis $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ where $\alpha_1 = (1, -2, 3)$, $\alpha_2 = (1, -1, 1)$, $\alpha_3 = (2, -4, 7)$.

(स) समाकारिता की अष्टि को परिभाषित कीजिए। सिद्ध कीजिए कि दो सदिश समष्टियों के बीच रैखिक प्रतिचित्रण एकैकी होगा यदि और केवल यदि प्रतिचित्रण की अष्टि में केवल एक अवयव, {0} है।

Define kernel of Homomorphism. Prove that any linear transformation from one-one vector space to other vector space is one if and only if the kernel of linear transformation has only one element {0}.

UNIT - 5

(अ) सिद्ध कीजिए कि आंतर गुणन समष्टि V(F) में सदिश α और β रैखिकतः परतंत्र होंगे यदि और केवल यदि $|(\alpha, \beta)| = \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$।

Prove that in an inner product space V(F), α and β are linearly dependent if and only if $|(\alpha, \beta)| = \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$.

(ब) परिमित विमीय सदिश समष्टियों के लिए बैसल की असमिका को लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove Bessel's inequality for finite dimensional vector spaces.

(स) लांबिक सदिशों को परिभाषित कीजिए। क्या $\alpha = (x_1, x_2)$, $\beta = (y_1, y_2) \in V_2(R)$ में परिभाषित $(\alpha, \beta) = 6x_1y_1 + 2x_2y_2$ एक आंतर गुणन है ?

Define orthogonal vectors. Is $\alpha = (x_1, x_2)$, $\beta = (y_1, y_2) \in V_2(R)$ and the definition $(\alpha, \beta) = 6x_1y_1 + 2x_2y_2$ an inner product ?